決定論的最適伐期齢に関する諸考察

赤尾, 健一; 岩井, 吉彌

決定論的最適伐期齢に関する諸考察

赤尾　健一・岩井　吉彌

Studies on Deterministic Optimal Rotation Periods of a Forest

Kenichi Akao , Yoshiya Iwai

要　　旨

本論文は，決定論的定常性の仮定の下に，さまざまな最適伐期齢決定ルールを定式化し，利子率や相対立木価格の水準を考慮して，諸最適伐期齢の大小関係を検討することを目的とする。検討される最適伐期齢は，最大持続収穫，森林純収穫，ファウストマン，ボールディング，フィッシャーのそれである。

ミクロ経済学的接近による林業経済分析を規範分析と実証分析に分けるとき，規範分析の観点からは，ファウストマン式が唯一適切な最適伐期齢決定ルールとなる。より正確に言えば，国民経済的な観点から森林の適切な取り扱いを考察する場合，森林の環境財的な側面も考慮した上で，無限の将来にわたって森林が供給する諸用役の現在割引価値の総和を最大化するファウストマンの考え方を基礎に置くべきである。他方，実証分析の観点からはファウストマン式に限定されることなく，現実の森林所有者がどのような決定ルールに従って行動しているかをモデル化し分析することになる。林業経済分析の課題は，社会的に望ましい森林のあり方を規範分析を通じて明らかにするとともに，実証分析と規範分析の結果の間にみられる差異や一致を解釈し，個々の森林所有者の行動の結果が望ましい森林資源の形成に結びつくように，補助・税制などの制度のあり方を考察することにある。

本論文は，このような林業経済の規範分析と実証分析の両者に共通して必要とされる基礎的な知識を提供するものである。得られた結果は，第７節の図１，図２にまとめられている。また，既存の研究成果に対する本論文の結果の応用例が第８節で示される。

1．はじめに

昨年報告した「最適伐期齢理論の課題と展望」（赤尾＝有木［１］）では，最適伐期齢理論の概説を行なった。その中で詳述したように，経済理論上最も適切な伐期齢を求めるならば，それはファウストマンの考え方に基礎を置かねばならない。より正確に言えば，規範的な観点から林業経済分析を行なう場合，無限の時間視野の下で得られる純報酬（あるいは木材生産と森林の環境財としての用役の両者を考慮して数量化した効用水準）の現在割引価値の総和や総和の期待値を分析の指標とすべきである。一方，実証的な観点から森林所有者の行動を分析するならば，ファウストマン式にこだわることなく，森林所有者がどのように森林の取り扱いを決定しているか，その意思決定のプロセスを抽象化してモデル化し，分析を行なうことになる。ミクロ経済学的接近による林業経済分析の中心課題は，規範分析を通じて国民経済や世界全体といった視点からみ

て望ましい森林資源構成とはどのようなものであるかを明らかにするとともに，規範分析の結果と実証分析の結果との間にみられる差異や一致を解釈し，個々の森林所有者の行動の結果が望ましい森林資源の形成に結びつくように，補助・税制など制度のあり方について考察することである。

ここで既存の研究成果について省みると，日本では具体的な森林所有者の行動に関する研究報告は決して少なくないし，他方欧米においては，規範分析の基礎となる社会的最適伐期齢に関する理論モデルが発展しつつある。しかし実際のところ，上述のような問題意識に応えるだけの研究蓄積は十分にあるとはいい難い。われわれは，いささか退屈で迂回的ではあるにしても，ミクロ経済学的接近による林業経済分析のために，多くの基礎的なことがらを明らかにしていく必要がある。

本論文はこのような基礎的な作業の一環として，さまざまな最適伐期齢決定ルールから導かれる最適伐期齢の大小関係について，決定論的定常性の仮定の下に検討することを課題としている。比較検討される最適伐期齢は，最大持続収穫量の最適伐期齢（T_G），森林純収穫最大の最適伐期齢（T_N），ファウストマンの最適伐期齢（T_F），ボールディングの最適伐期齢（T_B），そしてフィッシャーの最適伐期齢（T_H）である。なお，T_BとT_Hに関しては林地の機会費用や林地の市場価格を考慮しない最適伐期齢である。これらの最適伐期齢の大小比較は，部分的には半田［２］や鈴木［３］が行なっている。また，ヨハンソン＝レフグレン［４］が総括的にかなり詳細な検討を行なっている。本論文ではヨハンソン＝レフグレン［４］を参考にしながら，ボールディングの最適伐期齢とファウストマンの最適伐期齢の比較を新たにつけ加え，また，利子率及び賃金率に対する相対立木価格の変化による最適伐期齢の変化を考慮した結果を示すことで，最適伐期齢比較問題の完全な解答を提示する。

以下，次節では本論文の置いている仮定を示し，第３節でそれぞれの決定ルールの定式化と最適伐期齢の満たすべき必要条件を示す。第４節及び第５節では，各最適伐期齢の比較を行なう。第６節では，利子率及び相対立木価格の任意の値に対応する各最適伐期齢の大小関係を考察するため，これら２つの変数が各最適伐期齢に及ぼす影響について比較静学分析を行う。第７節では，以上の検討結果をまとめる。最後に第８節で，今回示した結果が具体的な林業経済分析においてどのように利用されるかについて，若干の応用を試みる。

2．仮　　定

ここでは，最適伐期齢の比較をする上での前提となる諸仮定について述べる。

1）完全競争市場の仮定：森林所有者の行動は生産要素及び産出物の価格や，利子率に影響を及ぼさない。林地は自由に売買，貸借することができる。また，将来の諸価格，利子率及び木材の収穫量を森林所有者は知っている。
2）定常性の仮定：賃金率（w），単位利用材積当り立木価格（p），利子率（r）は，現在から将来にわたり一定である。なお，rは連続型で表現される時間tに対応する瞬間的利子率である[1]。また，pは林齢に関わらず一定とする。
3）１点投入１点産出の仮定：投入は植林時点ですべて行なわれる。また，収穫は一挙に行なわれ，間伐による収穫は考えない。
4）森林の成長関数に関する仮定：森林からの収穫量（Q）は林地面積（M），労働投入量（L），林齢（T）の関数である。生産方式は一種類だけであり，生産要素である林地と労働力の結合

比率は固定的である。また，規模に関して収穫一定である。以上の仮定より単位面積あたりの収穫量（ f ）はTのみの関数となる。この関数 $f = f(T)$ は，閉区間［Tmin, Tmax］を定義域とし極大値（Ta）を持つ少なくとも２回連続微分可能な凹関数であると仮定する。すなわち，$T \in [T_{min}, T_a)$ で，$f'(T) > 0$，$T \in [T_{min}, T_{max}]$ で $f''(T) < 0$ である。なお，$T = T_{min}$ は，伐採収穫可能な最初の時点を示している。また，単位面積当りの労働投入量を ℓ とする（$\ell \equiv L/M$）。

3．決定ルールの定式化と最適伐期齢の１階の条件

次に，さまざまな決定ルールを定式化し，その最適解が満たす必要条件（１階の条件）を示す。

１）最大持続収穫の最適伐期齢（T_G）

最大持続収穫は，森林から得られる年平均生産量を最大にする伐期齢を最適伐期齢とする。最適伐期齢を T_G とすると，

$$\mathrm{Max}\left[\frac{f(T)}{T}\right] \equiv \frac{f(T_G)}{T_G} \tag{1}$$

であり，これより１階の条件は，

$$T_G \cdot f'(T_G) - f(T_G) = 0 \tag{2}$$

である。

２）森林純収穫最大の最適伐期齢（T_N）

森林純収穫最大の決定ルールでは，森林から得られる収入から，費用（ただし利子率で複利計算しないそれ）を差し引いたものの年平均値，すなわち森林貢租（FR；Forest Rent）を最大にする伐期齢を最適伐期齢とする。定式化すると，

$$\mathrm{Max}[FR] \equiv \frac{pf(T_N) - w\ell}{T_N} \tag{3}$$

であり，１階の条件は，

$$\left.\frac{dFR}{dT}\right|_{T=T_N} = \frac{p}{T^2}\left\{T \cdot f'(T) - \left[f(T) - \frac{W}{p}\ell\right]\right\} = 0 \tag{4}$$

となる。

整理すると，

$$T_N \cdot f'(T_N) - f(T_N) + \frac{W}{p}\ell = 0 \tag{5}$$

と表わされる。

３）ファウストマンの最適伐期齢（T_F）

ファウストマンの決定ルールは，現在から無限の将来にわたって得られる純報酬の現在割引価値の総和を最大にする伐期齢を最適伐期齢とする。完全競争市場の仮定の下では，得られた現在割引価値の総和は単位面積の土地の機会費用を表わすことになる。

現在割引価値の総和をVで表わすとVは

$$V \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left[pf(T)e^{-rT} - w\ell\right]e^{-r(n-1)T} = \frac{pf(T)e^{-rT} - w\ell}{1 - e^{-rT}} \tag{6}$$

と定義される。従って，その最適伐期齢（T_F）は

$$\mathrm{Max}[V] \equiv \frac{pf(T_F)e^{-rTF} - w\ell}{1 - e^{-rTF}} \tag{7}$$

と定式化される。VをTで微分することによって1階の条件を得る。

$$\left.\frac{dV}{dT}\right|_{T=T_F} = \frac{pe^{-rT}[f'(T) - rf(T)]}{1 - e^{-rT}} - \frac{re^{-rT}[pf(T)e^{-rT} - w\ell]}{(1 - e^{-rT})^2}$$

$$= \frac{e^{-rT}}{1 - e^{-rT}}\{pf'(T) - r[pf(T) + \frac{pf(T)e^{-rT} - w\ell}{1 - e^{-rT}}]\}$$

$$= 0 \tag{8}$$

すなわち,

$$pf'(T_F) - r[pf(T_F) + \frac{pf(T_F)e^{-rTF} - w\ell}{1 - e^{-rTF}}] = 0 \tag{9}$$

である。あるいは, T_Fに対応するVをV_Fで表わせば,

$$pf'(T_F) - r[pf(T_F) + V_F] = 0 \tag{10}$$

である。ここでV_Fは完全競争市場と定常性を仮定した時の林地の機会費用を表わしている。

4）ボールディングの最適伐期齢（T_B）

ボールディングの決定ルールは，次の恒等式（11）で定義される内部収益率（ρ）を最大化する伐期齢を最適伐期齢とする。

$$pf(T)e^{-\rho T} \equiv w\ell \tag{11}$$

（11）をρについて解くと，T_Bは次のように定式化される。

$$\mathrm{Max}[\rho] \equiv \frac{1}{T_B}[\log pf(T_B) - \log w\ell] \tag{12}$$

1階の条件は,

$$\left.\frac{d\rho}{dT}\right|_{T=T_B} = \frac{1}{T}\{\frac{f'(T)}{f(T)} - \frac{1}{T}[\log pf(T) - \log w\ell]\}$$

$$= \frac{1}{T}\{\frac{f'(T)}{f(T)} - \rho] = 0 \tag{13}$$

であり，整理すると

$$f'(T_B) - \rho f(T_B) = 0 \tag{14}$$

となる。

5）フィッシャーの最適伐期齢（T_H）

フィッシャーの決定ルールは，1回の収穫における純報酬の現在割引価値を最大にする伐期齢を最適伐期齢とする。その現在割引価値をPVで表わすと，その最適伐期齢は

$$\mathrm{Max}[PV] \equiv pf(T_H)e^{-rTH} - w\ell \tag{15}$$

と定式化される。1階の条件は,

$$\left.\frac{dPV}{dT}\right|_{T=T_H} = pe^{-rT}[f'(T) - rf(T)] = 0 \tag{16}$$

より,

$$f'(T_H) - rf(T_H) = 0 \tag{17}$$

と整理される。

以上，本論文で取り上げる決定ルールの定式化とそれぞれの最適伐期齢の１階の条件について示した。以下の考察に先立って，次の点を指摘しておく。最適伐期齢の１階の条件を見ると，T_N，T_F，T_Bは立木価格と賃金率の水準に応じてその最適伐期齢が変化することがわかる。しかし，λを任意の正定数として（５），（９），(14) にλｐ，λｗを代入しても，最適伐期齢は変化しない。すなわち，T_N，T_F，T_Bはｐ，ｗに関して０次同次関数となっており，立木価格が変化しても，同時に賃金率が変化して相対立木価格が変わらないのであれば，最適伐期齢はいずれの決定ルールでも変化しない。このことは，労働をニュメレールと見なして，賃金率ｗ＝１とし，立木価格ｐを相対立木価格Ｐ（≡ｐ／ｗ）に置き換えても，上述の決定ルールの式及び１階の条件にはなんら問題を生じないことを意味する。従って，以下の考察においてはｗ＝１とし，ｐの代わりにＰを用いて分析を行なうこととする。

４．最大持続収穫の最適伐期齢と森林純収穫最大の最適伐期齢の比較

森林純収穫最大の最適伐期齢の１階の条件である（５）をT_NとＰとの陰関数と見なして全微分すると，

$$[f'(T_N)+T_N f''(T_N)-f'(T_N)]\,dT_N+\left(-\frac{\ell}{P^2}\right)dP=0 \tag{18}$$

よって

$$\frac{dT_N}{dP}=\frac{\ell}{T_N\cdot f''(T_N)\cdot P^2}=\frac{(+)}{(-)}<0 \tag{19}$$

これより，T_Nは相対立木価格Ｐの単調減少関数であることがわかる。そして，$P\to\infty$の時，（５）は（２）に一致する。すなわち$P\to\infty$で，T_NはT_Gに収束する。また，$P<\infty$では$T_N>T_G$である。

ところで，最大化された森林貢祖を

$$FR^*\equiv FR^*[T_N(P),P] \tag{20}$$

とし，相対立木価格で微分すると包絡線定理より，

$$\frac{dFR^*}{dP}=\frac{\partial FR^*}{\partial T_N}\cdot\frac{dT_N}{dP}+\frac{\partial FR^*}{\partial P}=0\cdot\frac{dT_N}{dP}+\frac{\partial FR^*}{\partial P}=\frac{\partial FR^*}{\partial P}=\frac{f(T_N)}{T_N}>0 \tag{21}$$

となり，相対立木価格の減少はFR^*を減少させることがわかる。従って，$FR^*=0$となる相対立木価格のある水準$\underline{P}_N$が存在し，$P<\underline{P}_N$では森林純収穫を決定ルールとする森林所有者は，育林投資を行なわなくなる。（３）より，

$$\underline{P}_N=\mathrm{Min}\left[\frac{\ell}{f(T_N)}\right] \tag{22}$$

である。また (22) を１階の条件（５）に代入すれば，$f'(T_N)=0$。すなわち，$P=\underline{P}_N$の時，T_NはTa（利用材積が最大となる林齢）に一致する。以上をまとめると，$\underline{P}_N\leqq P<\infty$の時

$$T_G<T_N\leqq Ta \tag{23}$$

となる。

5. ファウストマン，ボールディング，フィッシャーの最適伐期齢の比較

「最適伐期齢理論の課題と展望」（赤尾＝有木［1］）では，ボールディングの最適伐期齢もフィッシャーの最適伐期齢もファウストマン式で与えられる林地の機会費用を考慮する限りファウストマンの最適伐期齢と一致することを示した。ここではこの結果を利用して，ボールディングの最適伐期齢はファウストマンの最適伐期齢よりも小さく，またフィッシャーの最適伐期齢はファウストマンの最適伐期齢より大きいことを示す。

方法としては，まず，林地価格（V_0）を含めた形でボールディング及びフィッシャーの最適伐期齢が満たすべき1階の条件を導き，次にこれを最適伐期齢と林地価格の陰関数と見なして全微分し，$dT_B/dV_0>0$，$dT_H/dV_0<0$となることを証明する。

林地価格を含めた場合の内部収益率（ρ）は，

$$[Pf(T)+V_0]e^{-\rho T}\equiv \ell + V_0 \tag{24}$$

を満たし，ボールディングの最適伐期齢は次のように定式化される。

$$\mathrm{Max}[\rho]\equiv\frac{1}{T_B}\{\log[Pf(T_B)+V_0]-\log(\ell+V_0)\} \tag{25}$$

である。

その1階の条件は

$$\left.\frac{d\rho}{dT}\right|_{T=T_B}=\frac{1}{T}\left[\frac{Pf'(T)}{Pf(T)+V_0}-\rho\right]=0 \tag{26}$$

である。あるいは

$$Pf'(T_B)-\rho[Pf(T_B)+V_0]=0 \tag{27}$$

である。

(27) をV_0とT_Bの陰関数と考えて全微分すると

$$\{Pf''(T_B)-\frac{\partial\rho}{\partial T_B}[Pf(T_B)+V_0]-\rho\cdot Pf'(T_B)\}dT_B$$
$$-\{\frac{\partial\rho}{\partial V_0}[Pf(T_B)+V_0]+\rho\}dV_0=0 \tag{28}$$

(26) より$\partial\rho/\partial T_B=0$。また (25)，(24) より

$$\frac{\partial\rho}{\partial V_0}=\frac{1}{T_B}\left[\frac{1}{Pf(T_B)+V_0}-\frac{1}{\ell+V_0}\right]=\frac{1-\frac{Pf(T_B)+V_0}{\ell+V_0}}{T_B[Pf(T_B)+V_0]}=\frac{1-e^{\rho TB}}{T_B[Pf(T_B)+V_0]} \tag{29}$$

であることに注意すると

$$\frac{dT_B}{dV_0}=\frac{\rho T_B+1-e^{\rho TB}}{T_B\cdot P[f''(T_B)-\rho f'(T_B)]} \tag{30}$$

ここで，分母に注目すると$T_B\leqq Ta$では，成長関数f（T）の仮定より負である（後に示すように$T_B\leqq T_F<T_N\leqq Ta$である）。一方，分子については$e^{\rho TB}$をマクローリン展開すると，

$$e^{\rho TB}=1+\rho T_B+\frac{(\rho T_B)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\rho T_B)^2}{n!}+\cdots \tag{31}$$

だから，ボールディングの決定ルールに従って育林投資が行なわれる限り（$\rho\geqq r>0$），分子は負となる。

従って，

$$\frac{dT_B}{dV_0}=\frac{(-)}{(-)}>0 \tag{32}$$

である。すなわち，V_0の減少に伴ってT_Bは減少する。V_Fをファウストマン式より得られる林地の機会費用とすると$V_0=V_F$の時$T_B=T_F$だから，$V_0=0\leqq V_F$では$T_B\leqq T_F$であるといえる。以上から，ボールディングの最適伐期齢はファウストマンの最適伐期齢以下であるといえる。

同様にフィッシャーの最適伐期齢について検討すると，林地価格を考慮したフィッシャーの最適伐期齢は次のように定式化される。

$$\mathrm{Max}[PV]\equiv[Pf(T_H)+V_0]e^{-rT_H}-(\ell+V_0) \tag{33}$$

1階の条件は

$$\left.\frac{dPV}{dT_H}\right|_{T=T_H}=\{Pf'(T)-r[Pf(T)+V_0]\}e^{-rT}=0 \tag{34}$$

であり，整理すると$T=T_H$では，

$$Pf'(T_H)-r[Pf(T_H)+V_0]=0 \tag{35}$$

が成立している。

（３５）をV_0とT_Hの陰関数と考えて全微分すると

$$[Pf''(T_H)-rPf'(T_H)]dT_H-rdV_0=0 \tag{36}$$

よって，

$$\frac{dT_H}{dV_0}=\frac{r}{Pf''(T_H)-rPf'(T_H)}=\frac{(+)}{(-)}<0 \tag{37}$$

(37) より，V_0が減少するのに伴ってT_Hは大きくなることがわかる。$V_0=V_F\geqq 0$で$T_H=T_F$だから，$V_0=0$の時$T_H\geqq T_F$。よってフィッシャーの最適伐期齢はファウストマンの最適伐期齢以上である。

6．比較静学分析

以上，さまざまな最適伐期齢に関して，個々にその大小を比較したが，これらを総合的に示すための準備として，それぞれの最適伐期齢の１階の条件を基に比較静学分析を行なう。

まず，最大持続収穫の最適伐期齢について。その１階の条件（２）から明らかなようにT_Gは，利子率の影響も相対立木価格の影響も受けない。

森林純収穫の最適伐期齢については既に (19) で示したように，相対立木価格の上昇はT_Nを小さくする。

ファウストマンの最適伐期齢は，その１階の条件（９）より利子率の影響も相対立木価格の影響も受ける。そこで，まず利子率の影響を検討する。

１階の条件 (10) をT_Fとrの関数と見なして全微分すると

$$\{Pf''(T_F)+r[Pf'(T_F)+\frac{\partial V_F}{\partial T_F}]\}dT_F-[Pf(T_F)+V_F+r\frac{\partial V_F}{\partial r}]dr=0 \tag{38}$$

ここで，$T=T_F$の時，$\partial V_F/\partial T_F=0$である。従って，$T_F\leqq Ta$を仮定する（後に示すように$T_F\leqq T_N\leqq Ta$であり，この仮定は正しい）と，成長関数についての仮定から，dT_Fの係数部分は負である。一方，drの係数部分については，

$$\{Pf(T_F)+V_F+r\frac{\partial V_F}{\partial r}=Pf(T_F)+V_F+r\{\frac{\partial}{\partial r}[\frac{Pf(T_F)e^{-rT_F}-\ell}{1-e^{-rT_F}}]\}$$
$$=Pf(T_F)+V_F+r\frac{-T_Fe^{-rT_F}}{1-e^{-rT_F}}[Pf(T_F)+V_F]$$
$$=[Pf(T_F)+V_F]\frac{1}{1-e^{-rT_F}}(1-e^{-rT_F}-rT_Fe^{-rT_F})$$
$$=[Pf(T_F)+V_F]\frac{e^{rT_F}-(1+rT_F)}{e^{rT_F}-1} \tag{39}$$

$rT_F>0$で，$e^{rT_F}-1>0$。また，マクローリン展開を利用すると

$$e^{rT_F}=1+rT_F+\frac{(rT_F)^2}{2!}+\cdots+\frac{(rT_F)^n}{n!}+\cdots \tag{40}$$

より，$e^{rT_F}-(1+rT_F)>0$である。従って，drの係数部分は正となる。以上から，

$$\frac{dT_F}{dr}=\frac{(+)}{(-)}<0 \tag{41}$$

となり，利子率の上昇はT_Fを小さくすることがわかる。

ところで包絡線定理と（39）より，

$$\frac{dV_F}{dr}=\frac{\partial V_F}{\partial r}=-\frac{T_Fe^{-rT_F}}{1-e^{-rT_F}}[Pf(T_F)+V_F]<0 \tag{42}$$

であることがわかる。このことは，無限の将来にわたり林地から得られる純報酬の現在割引価値の総和（V_F）がrの上昇に伴って減少することを示す。従って$V_F=0$となる利子率（$\equiv\overline{r}_F$）が存在する。$r>\overline{r}_F$では，V_Fがマイナスとなるから$\overline{r}_F$は，ファウストマンの決定ルールに従って育林投資が行なわれるときの利子率の上限といえる。また，赤尾＝有木［1］で示したように，林地の機会費用を考慮する限り，ボールディングとフィッシャーの最適伐期齢はファウストマンの最適伐期齢に一致する。その特殊なケースとして$V_F=0$を考えれば，$r=\overline{r}_F$ではこれら林地の機会費用を考慮しないT_B，T_HとT_Fの３つの最適伐期齢は一致するといえる。

ところで（７），（10）に$V_F=0$を代入すると，

$$Pf(T_F)e^{-\overline{r}_FT_F}-\ell=0 \tag{43}$$

$$Pf'(T_F)-\overline{r}_F[Pf'(T_F)]=0 \tag{44}$$

である。（11）と（43）を比べれば，$\overline{r}_F$が伐期齢T_Fにおける内部収益率を表わしていることがわかる。$r=\overline{r}_F$では$T_F=T_B$なので，$\overline{r}_F$はボールディングの最適伐期齢に対応する内部収益率である。ボールディングの最適伐期齢の１階の条件（14）より，利子率の変化はT_Bに影響を及ぼさない。しかしながら，もし$r>\overline{r}_F$（$=\rho$）ならば，ボールディングの決定ルールに従う森林所有者もまた育林投資を行なわない。なぜなら，ℓを他の投資対象に投じることでより高い収益率$\dot{r}$（$>\rho$）を実現することができるからである。

上式（43）に$T_F=T_H$を代入すると，$r=\overline{r}_F$ではその現在割引価値も０となっていることがわかる。ここで，フィッシャーの最適伐期齢に従って最適化された現在割引価値PV^*を

$$PV^*\equiv PV^*[T_H(r),r] \tag{45}$$

とし，rで微分すると

$$\frac{dPV^*}{dr}=\frac{\partial PV^*}{\partial r}=-T_HPf(T_H)e^{-rT_H}<0 \tag{46}$$

となる。すなわちPV^*はrの減少関数である。従って$r>\overline{r}_F$の時，PV^*はマイナスとなるか

ら，$\overline{r_F}$はフィッシャーの決定ルールに従って育林投資が行なわれる場合の利子率の上限でもある。結局，$r=\overline{r_F}$で$T_F=T_B=T_H$であり，$r>\overline{r_F}$の時，これら3つのいずれの決定ルールに従う森林所有者も育林投資を行なわない。そして，この$\overline{r_F}$はボールディングの最適伐期齢に対応する内部収益率と一致する。すなわち，

$$\overline{r_F}=\frac{1}{T_B}[\log Pf(T_B)-\log \ell] \tag{47}$$

である。

次に利子率が小さくなる場合について。（41）よりrが小さくなるとファウストマンの最適伐期齢T_Fは大きくなる。そこで$r\to 0$の時，T_Fはどのようになるかを検討する。

T_Fの1階の条件（9）を変形して次式を得る。

$$f'(T_F)=r\frac{(1-e^{-rTF})f(T_F)+f(T_F)e^{-rTF}}{1-e^{-rTF}}=\frac{r[f(T_F)-\frac{\ell}{P}]}{1-e^{-rTF}} \tag{48}$$

上式右辺に$r=0$を代入すると分子分母が0となり不定形となるから，ロピタルの定理を適用して，分子分母をrで微分したものの極限を考える。

$$\lim_{r\to 0} f'(T_F)=\lim_{r\to 0}\frac{f(T_F)-\frac{\ell}{P}}{T_F}=\frac{f(T_F)-\frac{\ell}{P}}{T_F} \tag{49}$$

従って，$r\to 0$で

$$T_F\cdot f'(T_F)-f(T_F)+\frac{\ell}{P}=0 \tag{50}$$

である。得られた（50）と森林純収穫最大の最適伐期齢の1階の条件（5）を比較すると，rが限りなく0に近づく時，T_FはT_Nに収束することがわかる。T_Fがrの単調減少関数であることと第4節での結果を思い出せば，$r>0$では

$$T_F<T_N\leqq Ta \tag{51}$$

であり，ファウストマンの最適伐期齢は森林純収穫最大の最適伐期齢より小さい。

次に相対立木価格の変化がファウストマンの最適伐期齢に及ぼす影響を検討する。1階の条件（10）をT_FとPの陰関数と見なして全微分すると，

$$\{Pf''(T_F)-r[Pf'(T_F)+\frac{\partial V_F}{\partial T_F}]\}dT_F$$

$$+\{f'(TF)-r[f(TF)+\frac{f(TF)e^{-rTF}}{1-e^{-rTF}}]dp=0 \tag{52}$$

dT_F/dPは，（9）を利用して，

$$\frac{dT_F}{dP}=-\frac{f'(T_F)-r[\frac{f(T_F)e^{-rTF}-\ell}{1-e^{-rTF}}]-\frac{r\ell}{1-e^{-rTF}}}{Pf''(T_F)-rPf'(T_F)}$$

$$=-\frac{-r\ell(1-e^{-rTF})^{-1}}{Pf''(T_F)-rPf'(T_F)}=-\frac{(-)}{(-)}<0 \tag{53}$$

であり，相対立木価格の上昇はT_Fを小さくする。Pの上昇に伴ってT_Fは次第に小さくなるが，伐採収穫可能な最小の伐期齢$T\min$に至ると，もはやそれ以上最適伐期齢を小さくすることはできない。

一方，Pの下落に伴ってT_Fは次第に大きくなる。ここでdV_F/dPを考えると，

$$\frac{dV_F}{dP}=\frac{\partial V_F}{\partial P}=\frac{f(T_F)e^{-rT_F}}{1-e^{-rT_F}}>0 \tag{54}$$

となり，Ｐの下落は最大化された純報酬の現在割引価値の和（V_F）を小さくすることがわかる。つまり，$V_F=0$となる最小の相対立木価格$\underline{P}_F$が存在し，$P<\underline{P}_F$ではファウストマンの決定ルールに従う森林所有者は育林投資を行なわなくなる。すなわち，$\underline{P}_F$はファウストマンの決定ルールに従って育林投資が行なわれる最小の相対立木価格である。

$P=\underline{P}_F$では$V_F=0$となるので，$r=r_F$の場合について行なった考察がここでもあてはまる。すなわち$V_F=0$となる$P=\underline{P}_F$では，$V_F=V_B=V_H$である。

ところで，$P=\underline{P}_F$では，次の（55），（56）が成立している。

$$\underline{P}_F f(T_F)e^{-rT_F}-\ell=0 \tag{55}$$

$$\underline{P}_F f'(T_F)-r\underline{P}_F f(T_F)=0 \tag{56}$$

（56）はフィッシャーの最適伐期齢の１階の条件であり，（55）によって$P=\underline{P}_F$の時のフィッシャーの最適伐期齢に対応する現在割引価値PV^*は０であることがわかる。PV^*をT_HとＰの関数と見なすと

$$PV^*_\cdot\equiv PV^*[T_F(P),P] \tag{57}$$

であり，（15）よりこれをＰで微分すると

$$\frac{dPV^*}{dP}=\frac{\partial PV^*}{\partial P}=f(T_F)e^{-rT_H}>0 \tag{58}$$

となる。すなわち，PV^*はＰの増加関数であり，$P<\underline{P}_F$の時$PV^*<0$となる。フィッシャーの最適伐期齢は，１階の条件（17）からわかるようにＰの水準に依存しないが，$P<\underline{P}_F$では現在割引価値はマイナスとなるので，この決定ルールに従う森林所有者は育林投資を行なわなくなる。従って，$\underline{P}_F$はフィッシャーの決定ルールに従って育林投資が行なわれる最小の相対立木価格であるといえる。

また，（55）より$P=\underline{P}_F$の時，ｒはT_Fを伐期齢としたときの内部収益率を表わしている。そして$r=\rho$を（56）に代入して（14）と見比べれば，（56）はボールディングの最適伐期齢の１階の条件であることがわかる。このことは既述の$P=\underline{P}_F$の時，$T_F=T_B$となることを再確認するものである。ここで，ボールディングの最適伐期齢に対応する内部収益率をρ^*で表わし，これをT_BとＰの関数と見なして，Ｐで微分すると，（12）より

$$\frac{d\rho^*[T_B(P),P]}{dP}=\frac{\partial\rho^*}{\partial P}=\frac{1}{T_BP}>0 \tag{59}$$

であり，ρ^*はＰの単調増加関数であることがわかる。$P=\underline{P}_F$で$\rho^*=r$だから，$P<\underline{P}_F$では$\rho^*<r$となる。すなわち，相対立木価格が$\underline{P}_F$より小さくなるならば，ボールディングの決定ルールに従う森林所有者は育林投資を行なわない。なぜならば，育林投資ℓを他の投資対象に投資することによって，より大きな収益率（$>\rho^*$）を実現することができるからである。従って，$\underline{P}_F$はボールディングの決定ルールに従って育林投資が行なわれる最小の相対立木価格でもあることがわかる。結局，$P=\underline{P}_F$で$T_F=T_B=T_H$であり，$P<P_F$の時，これら３つのいずれの決定ルールに従う森林所有者も育林投資を行なわない。なお，$\underline{P}_F$はフィッシャーの最適伐期齢（T_H）を用いて，$PV^*=0$より，

$$\underline{P}_F=\frac{\ell\cdot e^{rT_H}}{f(T_H)} \tag{60}$$

と表わされる。

最後にボールディングの最適伐期齢とフィッシャーの最適伐期齢に関する比較静学分析の結果を示す。

ボールディングの最適伐期齢の1階の条件（14）をT_BとPの陰関数と見なして全微分すると，

$$\{f''(T_B)-[\frac{f'(T_B)}{f(T_B)}\cdot f(T_B)+\rho\cdot f'(T_B)]\}dT_B+[-\frac{f'(T_B)}{P}]dP=0 \tag{61}$$

よって，

$$\frac{dT_B}{dP}=\frac{[f''(T_B)-f'(T_B)(1+\rho)]\ell}{f(T_B)}=\frac{(-)}{(+)}<0 \tag{62}$$

となり，T_Bは相対立木価格の単調減少関数である。相対立木価格の上昇によってT_Bは小さくなるが，$T_B=T\min$に至るともはや最適伐期齢を小さくすることはできなくなる。一方，相対立木価格が下落して$P<\underline{P_F}$となると，育林投資は行なわれなくなる。

次にフッシャーの最適伐期齢の1階の条件（17）をT_Hとrの陰関数と見なして全微分すると

$$[f''(T_H)-rf'(T_H)]dT_H-f'(T_H)dr=0 \tag{63}$$

であり，dT_H/drは

$$\frac{dT_H}{dr}=\frac{f'(T_H)}{f''(T_H)-rf'(T_H)}=\frac{(+)}{(-)}<0 \tag{64}$$

となる。従って，T_Hは利子率の単調減少関数である。利子率の上昇によってT_Hは小さくなるが，$r>\overline{r_F}$では育林投資が行なわれない。従って，$r=\overline{r_F}$に対応する最適伐期齢がT_Hの下限となる。また$r=0$を（17）に代入すると，

$$f'(T_H)=0=f'(Ta) \tag{65}$$

である。すなわち$r=0$の時，フィッシャーの最適伐期齢は利用材積最大の林齢Taに一致する。従って，TaがT_Hの上限である。

7．諸最適伐期齢の大小関係

各最適伐期齢の大小関係が直観的に理解できるように，以上の考察を図で示すこととする。図1は相対立木価格を所与とし，利子率が任意の値をとるものとした時の最適伐期齢を示している。図1では，相対立木価格が森林純収穫の決定ルールに従って育林投資が行なわれるための条件

$$P\geqq \underline{P_N}=\frac{\ell}{f(Ta)} \tag{66}$$

を満たすものとしている。

ファウストマン，フィッシャー，ボールディングの決定ルールに従って育林投資が行なわれる上限の利子率$\overline{r_F}$はボールディングの最適伐期齢に対応する内部収益率に一致するから，（59）よりPの水準に依存し，Pが上昇すると$\overline{r_F}$もまた上昇する。また，T_Nは（19）よりPの上昇によって小さくなる。図1の矢印はPの上昇による最適伐期齢の変化の方向を示している。

次に利子率を所与とし，相対立木価格が任意の値をとる場合の最適伐期齢を示す。図1からわかるように，利子率の水準によってT_HとT_Gの大小関係は変化する。2つの最適伐期齢が一致するのは，（2），（17）より，
$r=T_G^{-1}$の時であり，図1に示されているように，もし$r>(<)\ T_G^{-1}$なら，$T_H<(>)\ T_G$

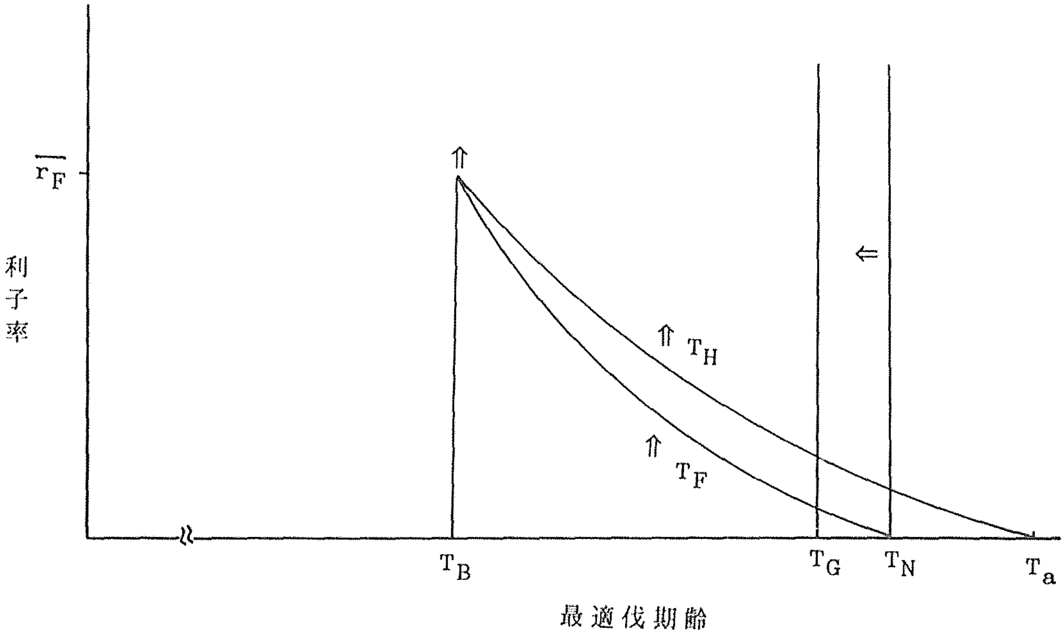

図1　最適伐期齢と利子率

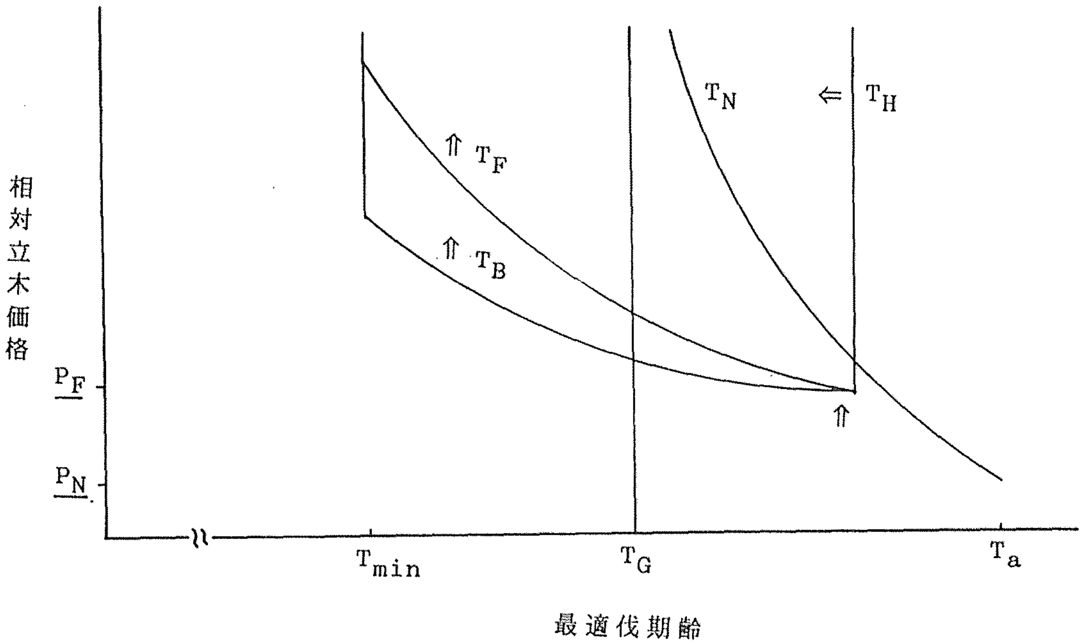

図2　最適伐期齢と相対立木価格

である。図2では，$r < T_G^{-1}$の場合について示した。

森林純収穫の決定ルールに従って育林投資が行なわれる最小の相対立木価格$\underline{P_N}$とファウストマン，ボールディング，フィッシャーの決定ルールに従って育林投資が行なわれる最小の相対立木価格$\underline{P_F}$の大小関係は，（22）と（60）より，$\underline{P_N} \leqq \underline{P_F}$である。rが大きくなれば，垂直の半直線で示された$T_H$は左方シフトするとともに，育林投資が行なわれる下限$\underline{P_F}$も上昇することになる。これは，（60）をrで微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\underline{P_F}}{dr} &= \frac{\partial \underline{P_F}}{\partial T_H} \cdot \frac{dT_H}{dr} + \frac{\partial \underline{P_F}}{\partial r} \\
&= \frac{\ell e^{rT_H}[rf(T_H) - f'(T_H)]}{[f(T_H)]^2} \cdot \frac{dT_H}{dr} + T_H \frac{\ell e^{rT_H}}{f(T_H)} \\
&= 0 + T_H \cdot \underline{P_F} > 0 \qquad (67)
\end{aligned}
$$

であることからわかる。一方，$r = 0$では$T_H = T_N = Ta$だから，（22）と（60）より，$\underline{P_N}$と$\underline{P_F}$も一致する。図2の矢印は，利子率の上昇が各最適伐期齢に及ぼす，以上のような変化の方向を示している。

8．おわりに

本論文では決定論的定常性の仮定の下に，諸最適伐期齢の大小関係を明らかにした。内容自体はきわめて形式的なものではあったが，ここで示した結果は規範分析と実証分析の両者に共通する基礎知識となるべきものである。本論文の最後にこの基礎知識がどのような形で林業経済分析に応用されるのかについて，近年の研究成果を題材に若干の応用を試みることにする。

家原＝黒川［5］は，マツ枯損跡地のような低位生産林地におけるヒノキ人工造林の投資採算性を，地位差に特に着目して検討している。同論文はまず投資基準について考察しており，現在割引価値基準については「採用する計算利子率の値によって計算が異なること，現在価値に割り引く計算利子率決定の合理的な基準が明確でないため計算仮定に恣意性を持ち込むこと，資本市場の完全性を前提とするものの，実際には資本調達に摩擦や制約があること，等」を問題点として指摘し，内部収益率を採算性の評価指標として採用している。以上の考察に続いて同論文は，地位別林齢別に内部収益率を具体的に算出し，劣悪な地位において育林投資が行なわれるためには賃金単価や伐出費用の大幅な節約や多額の造林補助金の支給が必要となることを指摘し，育林投資決定における地位の重要性を喚起している。

彼らはその論文の最後で，今後の研究課題の一つとして内部収益率以外の指標による採算性の比較を挙げている。この点に関して，本論文で得られた結果を応用してみよう。なお，彼らの論文は個別経営における規範分析といった性格を持っているが，以下ではむしろ個別経営に関する実証分析の観点から行なうことにしたい。その場合，前節までで用いた利子率は，個々の森林所有者の主観的なものとなり，その意味で利子率を主観的割引率と呼ぶことにする。まず，図1の結果から，彼らが取り上げていない現在割引価値基準に従う森林所有者，すなわちファウストマンやフィッシャーの決定ルールに従う森林所有者は，その想定する主観的割引率が各地位に対応する最大の内部収益率より低い場合は育林投資を行なうであろうことがわかる。また，森林純収穫最大を育林投資決定の指標とする森林所有者については，図2から土地が劣悪でボールディング（内部収益率基準），ファウストマン，フィッシャーの決定ルールに従う森林所有者ならば育林投資を行なわない場合でも，最大内部収益率が0以上であれば森林純収穫最大の決定ルールに

従う森林所有者は育林投資を行なうであろうということがわかる。以上のように彼らの論文は内部収益率のみを計算しているが，得られた結果は他の最適伐期齢決定ルールに従う森林所有者の育林投資行動に対しても有用な情報を提供していることが，本論文の結果からわかる。

もう一つの応用例として，熊崎［６］を取り上げる。同書は，「長伐期林業への道」というサブタイトルが示すように，日本の森林所有者が長伐期化を志向しつつあるという現実認識を基礎に，個別経営レベル，国民経済レベルの双方で長伐期林業を肯定的に評価している。ここではその主張の骨子を取り上げ，本論文の結果によってそれがどのように解釈されるかを示すことにしたい。なお，同書はすぐれて現実志向の論文であり，ここで紹介する内容がストレートに主張されているのではなく，著者の豊富な見識に裏付けされた細かな配慮もまた併せて考察されているということを予め記しておく。

個別経営レベルでの熊崎の主張の中心は次のように要約できる。日本の木材価格が将来的に上昇する可能性が小さい一方で，賃金率が他産業の発展によって今後とも上昇するだろうという予想の下では，労働投入量をできるだけ節約して自然の力を利用する生産方式を採用することが求められる。そのような生産方式の一つが長伐期林業である。

熊崎の想定する将来の木材価格と賃金率に関する予想は，相対立木価格の下落を意味する。相対立木価格が下落すると森林純収穫，ボールディング，ファウストマンの最適伐期齢はより長くなる（図２参照）から，これらの決定ルールに従う森林所有者は，その最適化行動の結果として伐期齢を延長することが理論モデルから導かれる。このように本論文の結果は，決定論的定常性の仮定を前提として，熊崎の主張を理論的に支持するものである。

熊崎は日本の森林所有者の最適伐期齢決定ルールが内部収益率最大（ボールディングの決定ルール）から森林純収穫最大に変化しつつあると見ている。本論文が示すようにボールディングの最適伐期齢は森林純収穫の最適伐期齢よりも短いから，熊崎の見解が事実ならば決定ルールの変化による長伐期化が生じたことになるであろう。あるいは，このような変化をもたらした背後に，森林所有者の林業所得への依存度の低下に起因する主観的割引率の低下があるとすれば，森林所有者は本来ファウストマンの決定ルールに従っており，図１に見られるように過去には最大内部収益率に等しい主観的割引率を想定し，その結果内部収益率最大の最適伐期齢を志向していたように見えていたが，次第に主観的割引率が低下し０に達して森林純収穫最大の最適伐期齢を志向するかのように見えるに至っているとも解釈できる。熊崎の見解は育成的林業新興国の合衆国の森林所有者の行動様式（内部収益率最大）と長い歴史を持つヨーロッパ諸国の森林所有者の行動様式（森林純収穫最大）の間に日本の森林所有者の行動様式の変化を置き，非常に興味深い。その検証と変化をもたらした要因に関する分析は，林業経済の実証分析における大きな課題といえる。

熊崎は国民経済レベルからも長伐期林業を肯定的にとらえている。その根拠は，伐期が長くなるにつれて森林の環境保全的な働きが改善されること，そして伐期を長くして森林の蓄積を増やすことが木材の生産水準を高めることにつながるということである。

前者に関しては，林齢が高まるとともに森林の環境財としての用役供給量が増加するとすれば，国民経済的観点から長伐期化は支持されるといえる。この点については，ハートマン［７］が興味深い定式化を行なっており，森林の材積成長量がマイナスとなるような伐期齢が社会的に最適な伐期齢となる可能性があることを示唆している[2]。

後者に関して，熊崎は先進２５ヶ国の森林蓄積量と丸太生産量の１９７０年代のデータを基に経験的に述べている。しかし，このことが森林蓄積の増大（＝長伐期化）は国民経済的に望ましいという主張に直ちにつながるわけではないことに注意すべきである。蓄積量の増大と丸太生産

量との間には短期的にはトレード・オフの関係がある。ある森林蓄積量の水準から，より大きな森林蓄積量の水準に移行する間は，丸太生産量をある程度は諦めなければならない。その間の耐忍の大きさと，将来得られる丸太生産量の増加分との間の代替関係によって，蓄積量の増大が社会的に望ましいことかどうかが決められるのである。これは，現在の日本のように木材需給が逼迫していない状態では見過ごされがちなことだが，国民経済的観点から森林資源の望ましいあり方を考える上では欠くことのできない観点である。すなわち，現在の木材１単位の耐忍が将来消費できる木材の何単位に相当するかという社会的割引率（以前の節で利子率と表現していたものは，国民経済観点からの規範分析では社会的割引率と呼ばれる）と，無限の将来にわたって得られる木材の増加分を考慮にいれて，森林資源構成の望ましい状態と現在の森林の状態からそこへと至る過程のあり方が決定されるべきである。

このような考え方をモデル化したものがファウストマン式であることは，十分に認識される必要がある。本論文では，さまざまな決定ルールから導かれる最適伐期齢について考察してきたが，冒頭で述べたように規範的な分析においては，森林の環境財的な側面をも考慮にいれた上で，ファウストマンの考え方に従ってモデル化し分析を行なわねばならない。それ以外の決定ルールは，ここで取り上げたもの以外のものも含めて，森林所有者の行動様式を叙述し林業経済の動向を分析する実証分析においてはファウストマンの決定ルールと対等に見なされるものだが，規範分析においてはたかだかファウストマンの決定ルールから得られる最適解や最適経路を間接的に表現する役割しか持たない。例えば，モデルが余りに複雑になり過ぎてファウストマンの考え方に従って定式化し解を検討することが困難な場合に，次善策として他の決定ルールが用いられる。このような場合，ファウストマンの最適解と他の決定ルールの最適解との間の大小関係を把握しておくことはきわめて重要なことである。このことを本論文の最後に強調しておきたい。

註

1）瞬間的利子率は，単位時間を無限小としたときの利子率の極限として与えられる。このことを示すと次のようになる。離散的な時間を，例えば１年を単位として考え，その利子率を i とする。t 年後にある投資プロジェクトからＲ円の純報酬が得られるとすれば，その現在割引価値はＲ $(1+i)^{-t}$ 円である。今，単位を１／m年とし，対応する利子率を r／mで表わすとする。$(1+r/m)^m=(1+i)$ であり，投資の現在割引価値はＲ $[(1+r/m)^m]^{-t}$ である。ここで単位時間を無限小とするために m→∞を考えると，

$$\lim_{m\to\infty} R\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^{-t}=\lim_{\frac{r}{m}\to\infty} R\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{-rt}=Re^{-rt} \tag{68}$$

となる。（６８）は連続型時間におけるこの投資プロジェクトの現在割引価値を表わし，r は連続型時間に対応する瞬間的利子率である。

2）ハートマン［７］は，小池［８］の中で紹介されている。しかし，小池［８］に記載されたモデルはフィッシャーの決定ルールに基づくものであり，ファウストマン式の拡張にはなっていない。ファウストマンの考え方に基づく厳密な定式化と最適解の１階の条件については原論文を参照されたい。

引用文献

[1] 赤尾健一・有木純善：最適伐期齢理論の課題と展望．京都大学農学部演習林報告．61. 130-149, 1990

[2] 半田良一：伐期令の理論．日本林業技術協会．東京，1957

[3] 鈴木太七：森林経理学．朝倉書店．東京，1979

[4] Johhanson,P.O. and K.G.Löfgren : The Economics of Forestry and Natural Resources. Basil Blackwell. Oxford, 1985

[5] 家原敏郎・黒川泰亨：低位生産林地におけるヒノキ人工林造成の経営的評価．日本林学会誌．72. 34-45, 1990

[6] 熊崎実：転換期の林業経営．林業科学技術振興所．東京，1985
[7] Hartman,R : The Harvesting Decision when a Standing Forest Has Value. Economic Inquiry. 14. 52-58, 1976
[8] 小池浩一郎：林価算法の経済学的考察．林業経済研究．117. 59-61, 1990

Résumé

This paper formulates various decision rules about optimal rotation period under the assumptions of certainty and steady state, and examines the relationship among optimal rotation periods derived from these formulae in consideration of interest rates and relative stumpage prices. The optimal rotation periods examined here are ones of Maximum Sustain Yield's, Net Maximum Sustain Yield's, Faustmann's, Boulding's and Fisher's.

When one analyzes forest economy from the viewpoint of normative economics, Faustmann Formula is the only correct rule to decide optimal rotation period. More correctly speaking, the appropriate treatment of forests for economic welfare should be based on the Faustmann's idea, which requests to maximize sum of present discounted values of infinite stream of utility generated by forests that not only supply timber but immaterial service as environmental assets. On the other hand, from the viewpoint of positive economics, one should model from concrete behavior of forest owners' and it is not necessary to restrict the model to Faustmann Formula. The ultimate theme of forest economic analysis is to show the proper constitution of forests from a social point of view through normative analysis and to find effective system to realize it through interpretaion of difference and coincidence between the results of normative analysis and ones of positive analysis.

This paper provides basic knowledge which will be useful for both normative and positive analysis. The results of this paper is intensively shown on Fig.1 and 2. Section 8 is an example to show how the results are applied to current forest economic analyses in Japan.